Conform noilor modele stabilite de MEN

BAC 2018

Daniel Petriceanu • Eugen Radu •
Ana-Maria Petriceanu •
Mihai Bunget • Nicuşor Minculete

MATEMATICĂ

REVIZUIT ȘI ADĂUGIT

CORINT BOOKS

CUVÂNT-ÎNAINTE

Lucrarea se adresează elevilor care vor susține examenul de bacalaureat, dar și celor care doresc să continue studiile într-o facultate tehnică sau economică.

Testele au fost concepute în concordanță cu programa școlară în vigoare și respectă structura anunțată de către Ministerul Educației Naționale.

Am propus teste prin care elevii pot să realizeze o evaluare cât mai obiectivă a cunoștințelor lor, având rezolvări detaliate cu soluții complete. Pentru o evaluare exactă a punctajului, fiecare enunț are alocate câte 5 puncte, iar fiecare test are 10 puncte din oficiu, realizându-se un total de 100 de puncte pe test.

Recomandăm elevilor rezolvarea testelor după ce au făcut o recapitulare temeinică a cunoștințelor.

Este bine ca indicațiile sau soluțiile prezentate de noi să fie folosite numai pentru verificări. Dacă soluția unei probleme nu a putut fi găsită după mai multe încercări, atunci ideea acelei probleme se poate lua din capitolul dedicat soluțiilor. Pe de altă parte, vă invităm să găsiți și alte soluții ale problemelor prezentate.

Vă dorim succes la examenele pe care le veți susține!

Autorii

BREVIAR DE CERINȚE

Pentru fiecare capitol vom preciza principalele idei și cerințe pe care trebuie să le cunoască un candidat la proba de matematică, profil matematică – informatică, bacalaureat 2018.

Ecuația de gradul al II-lea. Funcția de gradul al II-lea

- Formula de rezolvare.
- Condiții necesare și suficiente pentru ca o ecuație de gradul al II-lea să aibă rădăcini reale.
- Relațiile lui Viète.
- Semnul rădăcinilor.
- Determinarea coeficienților funcției.
- Forma canonică. Coordonatele vârfului. Graficul funcției.
- Poziția unei drepte fața de o parabolă.
- Rezolvarea inecuațiilor de gradul al II-Iea.
- Rezolvarea sistemelor de ecuații (inclusiv sisteme simetrice și omogene).

Logică matematică. Mulțimi. Inducție matematică

- Sensul cuantificatorilor există și oricare.
- Determinarea unei mulțimi.
- Operații cu mulțimi.
- Principiile de inducție (tip 1 și 2).
- Calculele sumelor și produselor.

Șiruri. Progresii

- Relații de recurență.
- Formula termenului general al progresiei.
- Condiții echivalente pentru ca un șir să fie progresie.
- Suma primilor *n* termeni ai unei progresii.
- Recurențe de ordinul întâi și doi. Determinarea termenului general.

TESTE PROPUSE

Testul 1

Subiectul I (30 de puncte, câte 5 puncte pentru fiecare item)

1. Rezolvați inecuația $x^2 - x \leq 0$.

2. Raționalizați fracția $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$.

3. Considerăm funcția $f:[0;\infty) \to [1;\infty)$, $f(x) = x^2 + 1$. Demonstrați că f este funcție inversabilă.

4. Determinați rangul termenului care îl conține pe x^3 din dezvoltarea $(x\sqrt{x}+1)^{2018}$.

5. În triunghiul ABC, notăm $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Considerăm $D \in BC$ și $E \in AD$ astfel încât $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{ED}$. Exprimați $\overrightarrow{AE}$ în funcție $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

6. Demonstrați că ecuația $2\sin x + \cos x = 3$ nu are soluții.

Subiectul al II-lea (30 de puncte, câte 5 puncte pentru fiecare item)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

a) Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ care verifică egalitatea $AX = XA$.

b) Rezolvați ecuația $X^2 = A$.

c) Demonstrați că $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ avem $A^n \neq I_2$.

2. În mulțimea $M = (1;\infty)$ definim legea $x * y = 2 + \{x + y\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a lui a.

a) Demonstrați că M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea definită.

b) Demonstrați că legea este asociativă.

c) Demonstrați că legea nu are element neutru.

Subiectul al III-lea (30 de puncte, câte 5 puncte pentru fiecare item)

1. Considerăm șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $x_1 = a$, $a \in (4; 5)$,

$x_{n+1} = x_n^2 - 8x_n + 20, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$

a) Demonstrați că $x_n \in (4; 5), \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir strict descrescător.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 4$.

2. Fie $I_n = \int_1^2 \ln(1 + x^n)dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_1.

b) Demonstrați că $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir crescător.

c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} I_n$.

Testul 25

Subiectul I (30 de puncte, câte 5 puncte pentru fiecare item)

1. Rezolvați inecuația: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} < 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Dați exemplu de un număr $a \in \mathbb{Q}$ pentru care $\left|a - \sqrt{5}\right| < \frac{1}{100}$.

3. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care are sens $\arcsin(2x^2 - 1)$.

4. Rezolvați ecuația: $4^x + 2^x - 2 = 0$.

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$. Determinați $f([-2; 1])$.

6. Într-un cerc, dacă $AB = 12$ și coarda $[AB]$ subîntinde un unghi de $120°$, aflați raza cercului.

Subiectul al II-lea (30 de puncte, câte 5 puncte pentru fiecare item)

1. a) Dați exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\{-1; 1\})$ cu $\det A = 0$.
b) Demonstrați că dacă $B \in \mathcal{M}_3(\{-1; 1\})$, atunci $\det B \in \{-4; 0; 4\}$.
c) Demonstrați că dacă $C \in \mathcal{M}_4(\{-1; 1\})$, atunci $\det C \,\vdots\, 8$.

2. Se dau polinoamele $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = X^5 - 5X^4 + 3X^3 + 11X^2 - 6X - 4$ și $Q(X) = X^5 - 5X^4 + 6X^3 + 2X^2 - 12X + 8$.
a) Verificați că 1 este rădăcină comună a celor două polinoame.
b) Aflați un c.m.m.d.c. al polinoamelor P și Q.
c) Demonstrați că P și Q mai au două rădăcini reale în comun.

Subiectul al III-lea (30 de puncte, câte 5 puncte pentru fiecare item)

1. a) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{3}{x}\right]$, unde $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă.

c) Determinați domeniul de continuitate al funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = \{x\}(2 - \{x\})$, unde $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracționară.

2. Fie $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}, & x \in [-1; 0] \\ x\sin x, & x \in (0; 1] \end{cases}$.

a) Arătați că funcția f este integrabilă.

b) Calculați o primitivă a funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\int_0^{x^3} f(t)dt}{x^5}$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

Testul 1

Subiectul I

1. $x \in [0;1]$.

2. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+1} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$.

3. $y \in [1;\infty)$, $f(x) = y \Leftrightarrow x^2+1 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}$. Ecuația are soluție unică, adică f este bijectivă. De aici obținem ca f este inversabilă.

4. $T_{k+1} = C_{2018}^{k}(x\sqrt{x})^{2018-k} = C_{2018}^{k}x^{\frac{3(2018-k)}{2}}$. Atunci $\frac{3(2018-k)}{2} = 3$, de unde $k = 2016$. Termenul căutat este T_{2017}.

5. $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right) = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} =$
$= \frac{1}{4}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

6. $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$; obținem din ecuație că $\sin x = 1$, $\cos x = 1$. Deoarece $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obținem $2 = 1$. Fals.

Subiectul al II-lea

1. a) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din ipoteză obținem $b = 2k$, $c = 4k$, $d = a+9k$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$.

b) $\det X^2 = 2 \Leftrightarrow \det X = \pm\sqrt{2}$. Dacă $\det X = \sqrt{2}$ atunci, folosind ecuația caracteristică, obținem $X = \frac{\pm 1}{\sqrt{11+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 2 \\ 4 & 10+\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Dacă $\det X = -\sqrt{2}$ procedăm la fel și obținem $X = \frac{\pm 1}{\sqrt{11-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 2 \\ 4 & 10-\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

c) Presupunem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = I_2$. Aplicăm determinantul și obținem $(\det A)^n = 1 \Leftrightarrow 2^n = 1$. Fals.

2. a) Fie $x, y \in (1;\infty)$; atunci $\{x+y\} \in [0;1) \Rightarrow x * y \geq 2 > 1$, deci $x * y \in M$.

b) Demonstrăm că $x * (y * z) = (x * y) * z \Leftrightarrow 2 + \{x + (y * z)\} = 2 + \{(x * y) + z\} \Leftrightarrow \{x + 2 + \{y+z\}\} = \{2 + \{x+y\} + z\} \Leftrightarrow \{x+y+z-[y+z]\} = \{x+y+z-[x+y]\} \Leftrightarrow \{x+y+z\} = \{x+y+z\}$. Adevărată.

c) Avem $x * e = x \Leftrightarrow 2 + \{x+e\} = x, \forall\ x \in (1;\infty)$. Luăm $x = 2$ și obținem $2 + \{2+e\} = 2 \Leftrightarrow \{e\} = 0 \Leftrightarrow e \in \mathbb{Z}$. Obținem $2 + \{x\} = x$, $\forall\ x \in (1;\infty)$. Pentru $x = 3$ relația este falsă. Așadar, legea nu are element neutru.

Subiectul al III-lea

1. a) Avem $x_1 = a \in (4;5)$. Presupunem $x_k \in (4;5)$ și demonstrăm că $x_{k+1} \in (4;5)$.

Așadar $x_{k+1} > 4 \Leftrightarrow x_k^2 - 8x_k + 16 > 0 \Leftrightarrow (x_k - 4)^2 > 0$, adevărată, deoarece $x_k \neq 4$. De asemenea, $x_{k+1} < 5 \Leftrightarrow (x_k - 3)(x_k - 5) < 0$, care este adevărată deoarece $4 < x_k < 5$. Deci, $x_n \in (4;5)$.

b) $x_{n+1} - x_n = (x_n - 4)(x_n - 5) < 0 \Rightarrow (x_n)_n$ este șir descrescător.

c) Din a), b) și teorema lui Weierstrass rezultă că $(x_n)_n$ este șir convergent. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, $l \in [4;5]$. Avem $l = l^2 - 8l + 20$, adică $l \in \{4;5\}$. Deoarece șirul este descrescător, atunci $l = 4$.

2. a) $I_1 = \int_1^2 \ln(1+x)dx = (1+x)\ln(1+x)\Big|_1^2 - \int_1^2 1dx = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$.

b) $\forall\ x \in [1;2]$, $x^n \leq x^{n+1} \Rightarrow \ln(1+x^n) \leq \ln(1+x^{n+1}) \Rightarrow I_n \leq I_{n+1}$, deci $(I_n)_n$ este șir crescător.

c) $I_n = \int_1^2 \ln x^n\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)dx = \int_1^2 \left(n\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)\right)dx = n\int_1^2 \ln x dx + \int_1^2 \lim\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)dx = n(2\ln 2 - 1) + \int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)dx$.

Avem $\frac{1}{n}I_n = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{n}\int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)dx$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)dx = 0$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}I_n = 2\ln 2 - 1$.

Testul 25

Subiectul I

1. Condiție existență: $x \neq 0$.

Dacă $x < 0$, atunci inecuația este echivalentă cu: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} < 0 < 1$.

Dacă $x > 0$, atunci inecuația este echivalentă cu: $\sqrt[3]{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$.

Soluția este: $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

2. $a = 2{,}23$.

3. $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$.

4. Funcția $f(x) = 4^x + 2^x - 2$ este strict crescătoare, deci ecuația are cel mult o soluție; observăm că $x = 0$ verifică ecuația.

5. f este monotonă (și continuă) pe fiecare din intervalele $[-2; -1]$ și $[-1; 1]$. $f([-2; 1]) = f([-2; -1]) \cup f([-1; 1]) = [f(-1); f(-2)] \cup [f(-1); f(1)] = [-1; 0] \cup [-1; 3] = [-1; 3]$.

6. Coarda $[AB]$ este o coardă remarcabilă, adică este latura triughiului echilateral înscris în cerc: $AB = l_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow 12 = R\sqrt{3} \Rightarrow R = 4\sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea

1. a) O matrice cu două coloane (linii) egale;

b) Scădem coloana I din celelalte două coloane. Dacă una dintre coloane este nulă, atunci $\det B = 0$. Dacă niciuna dintre coloane nu este nulă, scoatem factorul 2 de pe fiecare coloană; rezultă că $(\det B) \vdots 4$.
Însă $|\det B| \leqslant 6$ (este sumă de 6 termeni egali cu ± 1);

c) Asemănător.

2. a) Verificare directă;

b) Se aplică *Algoritmul lui Euclid* și se obține: $X^3 - 3X^2 - 2X + 4$;

c) Celelalte două rădăcini ale celui mai mare divizor în comun sunt rădăcini comune pentru cele două polinoame. Ecuația asociată lui c.m.m.d.c. este:
$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ și $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{5}$.

Subiectul al III-lea

1. a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{3}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0}x\left(\dfrac{3}{x}-\left\{\dfrac{3}{x}\right\}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(3-x\left\{\dfrac{3}{x}\right\}\right)$ $=3-0=3$ pentru că $\left\{\dfrac{3}{x}\right\}$ este mărginită;

c) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ ca produs de funcții continue; fie $k\in\mathbb{Z}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x<k}}f(x)=1\cdot(2-1)=1$; $\lim\limits_{\substack{x\to k\\ x>k}}f(x)=0\cdot(2-0)=0$;

deci f este discontinuă în k; domeniul de continuitate este $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

2. a) f este continuă în 0, deci este continuă pe $[-1; 2]$ și integrabilă;

b) f fiind continuă, admite primitive.

O primitivă a funcției $\dfrac{x}{x^2+1}$ este $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$.

O primitivă a funcției $x\sin x$ se obține prin integrare prin părți:

$\int x\sin x\,dx=\int x(-\cos x)'dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+c$.

O primitivă a funcției f este: $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c_1, & x\in[-1;0]\\ -x\cos x+\sin x+c_2, & x\in(0;1)\end{cases}$.

Din condiția de continuitate a lui F în 0, rezultă $c_2=c_1$, deci F este o primitivă a lui f;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^{x^3}f(t)dt}{x^5}\overset{\text{l'H}}{=}\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\dfrac{f(x)\cdot\left(x^3\right)'}{5x^4}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\dfrac{f(x)\cdot3x^2}{5x^4}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\dfrac{x\sin x}{x^2}=$

$=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{3}{5}$.